SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Fausto Ferrari

PROBLEMI ELLITTICI A DUE FASI: REGOLARITÀ DELLA FRONTIERA LIBERA

25 marzo 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Abstract: Lipschitz free boundaries of the elliptic two phase problems, with Hölder continuous coefficients, are $C^{0,\alpha}$.

Sunto: Le frontiere libere dei problemi ellittici a due fasi, con coefficienti Hölder continui, sono $C^{0,\alpha}$.

1. Introduzione

Numerosi fenomeni fisici ed econonomici possono essere modellizzati mediante problemi di frontiera libera. Dal punto di vista matematico si pensi al problema dell'ostacolo e al problema di Stefan, soltanto per citare gli esempi più noti.

Formalmente si cerca una funzione u che soddisfi, per esempio nel caso dell'operatore di Laplace, le seguenti condizioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega^+(u), \\ \Delta u = 0, & \mathrm{int}(\Omega^-(u)), \\ u = 0, & \mathcal{F}(u), \\ G(u_\nu^-) = u_\nu^+, & x \in \mathcal{F}(u), \end{cases}$$

dove, $\Omega^+(u) = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ u > 0\}$, $\Omega^-(u) = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ u \leq 0\}$, $\mathrm{int}(\Omega^-(u))$ è l'interno di $\Omega^-(u)$ e $\mathcal{F}(u) = \partial\Omega^+(u) \cap \Omega$ è la cosiddetta *frontiera libera*, mentre u_ν^+ e u_ν^- sono le derivate, rispettivamente di u^+ e u^-, calcolate rispetto a ν vettore normale, (ν punta all'interno), sulla frontiera libera $\mathcal{F}(u)$.

Il concetto di soluzione può essere formulato in vari modi, si parla di soluzioni classiche, deboli o viscose, anche se, in ogni caso, lo scopo è quello di provare che comunque le soluzioni considerate godono di ulteriori proprietà di regolarità che le avvicinano a quelle classiche.

Sotto questo aspetto la nozione di soluzione viscosa è assai utile per la sua flessibilità.

Definizione 1.1. Sia $u \in C(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Diremo che u è sottosoluzione viscosa di $\Delta u = 0$ se per ogni funzione $\phi \in C^2(\Omega)$ e per ogni $x_0 \in \Omega$,
se $u - \phi$ realizza un massimo locale in x_0, allora $\Delta\phi(x_0) \geq 0$.

Definizione 1.2. Sia $u \in C(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Diremo che u è soprasoluzione viscosa di $\Delta u = 0$ se per ogni funzione $\phi \in C^2(\Omega)$ e per ogni $x_0 \in \Omega$,
se $u - \phi$ realizza un minimo locale in x_0, allora $\Delta\phi(x_0) \leq 0$.

Definizione 1.3. Sia $u \in C(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Diremo che u è soluzione viscosa di $\Delta u = 0$ se è sottosoluzione viscosa e soprasoluzione viscosa di $\Delta u = 0$ in Ω.

Con tale nozione di soluzione non si richiede a priori alla soluzione u di $\Delta u = 0$ una regolarità particolare, anche se è noto che u è soluzione viscosa di $\Delta u = 0$ se e solo se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in senso classico, vedi [4]. Luis Caffarelli, in [6], si è occupato della regolarità della frontiera libera delle soluzioni viscose del problema (1), in particolare ha provato che se la frontiera libera è grafico di una funzione Lipschitz continua, allora è anche $C^{1,\alpha}$. La ragione per cui si considera la frontiera libera assumendo per essa una regolatità Lipschitz, dipende più o meno direttamente dai risultati ottenuti da De Giorgi nella teoria delle superficie minime, vedi [12].

(De Giorgi) Sia S una superficie minima in B_1 nell'ipotesi in cui S sia il grafico di una funzione Lipschitz, $x_n = w(x')$, $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, con costante di lipschitz λ. Allora S è $C^{1,\alpha}$ in $B_{1/2}$ per un certo $\alpha \in]0, 1]$.

L'idea della prova del risultato di De Giorgi è la seguente. Se S è una superficie minima, allora la curvatura media della superficie è 0, cioè

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_i\left(\frac{D_i w}{(1+ \mid \nabla w \mid^2)^{1/2}}\right) = 0.$$

Quindi, formalmente, ogni derivata direzionale $v = D_\tau w$ soddisfa l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(D_i\left(\frac{\delta_{ij} D_j v}{(1+ \mid \nabla w \mid^2)^{1/2}} - \frac{D_i w D_j w D_j v}{(1+ \mid \nabla w \mid^2)^{3/2}}\right)\right) = 0,$$

da cui segue

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} D_i(a_{ij}(x)D_jv(x)) = 0,$$

dove

$$a_{ij}(x) = \frac{(1+\mid \nabla w \mid^2)\delta_{ij} - D_iwD_jw}{(1+\mid \nabla w \mid^2)^{3/2}}$$

è una matrice a coefficienti misurabili uniformemente ellittica. Applicando il risultato di De Giorgi si conclude che v è $C^{0,\alpha}$ e che quindi $w \in C^{1,\alpha}$.

Il risultato di De Giorgi si basa sul fatto che detta v una soluzione di $\sum_{i,j=1}^{n-1} D_i(a_{ij}(x)D_jv(x)) = 0$ in B_1 con $\mid v \mid \leq 1$, se $\mid \{v < 0\} \mid \geq \frac{1}{2} \mid B_1 \mid$ allora $v \leq \lambda < 1$ in $B_{1/2}$. La possibilità si riscalare e iterare il lemma determina un decadimento geometrico della costante di Lipschitz in palle diadiche da cui scaturisce la Hölder continutià di v.

Osserviamo che, in analogia con il procedimento iterativo nella dimotrazione di De Giorgi, il decadimento geometrico della costante di Lipschitz in palle diadiche, nell'idea di Athanassopulos e Caffarelli, vedi [2], successivamente sviluppata da Caffarelli sul guadagno di regolarità della frontiera libera, vedi [6], si ripresenterà sotto forma di incremento geometrico in palle diadiche dell'apertura di opportuni coni di monotonia della soluzione del problema di frontiera libera.

Da questo punto di vista, la nozione di soluzione viscosa si rivela utile proprio nel momento in cui, assumendo la frontiera libera soltanto Lipschitz continua, occorre spiegare il significato in (1) della condizione sulle derivate. Infatti nella formulazione associata alla nozione di soluzione classica di (1) la derivata in $\mathcal{F}(u)$ non è necessariamente definita. È noto peraltro che se la frontiera di un insieme è soltanto Lipschitz allora, vedi Miller [23], le soluzioni del problema di Dirichlet con dati regolari al bordo sono C^2 all'interno, ma soltanto Hölder continue fino alla frontiera, vedi anche [8] e [21] per risultati più generali. Infatti la soluzione del problema di Dirichlet in un dominio con la proprietà del cono esterno vede la sua regolarià dipendere dall'ampiezza del cono esterno e pertanto essa sarà soltanto $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Caffarelli indebolì la condizione sulle derivate nel modo seguente.

$G(u_\nu^-) = u_\nu^+$ è soddisfatta in senso viscoso se per ogni $x_0 \in \mathcal{F}(u) \equiv \partial\Omega^+(u) \cap \Omega$, per cui esiste $y \in \Omega$ con $B_\varrho(y)$ tale che $x_0 \in \partial B_\varrho(y)$ e $B_\varrho(y)$ palla di raggio ρ contenuta in $\Omega^+(u)$ o in $\Omega^-(u)$ è tale che $\{x_0\} = \bar{B}_\rho(y) \cap \mathcal{F}(u)$ (punti *regolari*), allora per ogni coppia α, β di numeri non negativi tali che in un intorno di x_0

$$u(x) = \alpha < x - x_0, \nu >^+ - \beta < x - x_0, \nu >^- + o(|x - x_0|), \qquad x \to x_0, \tag{2}$$

dove ν è la normale unitaria a $\partial B_\varrho(y)$ in x_0 che punta all'interno di $\Omega^+(u)$, allora

$$\alpha = G(\beta). \tag{3}$$

Rimane da comprendere il ruolo della funzione G. A questo proposito osserviamo che l'esistenza di punti *regolari* nel senso precedentemente espresso permette di applicare il principio del massimo di Hopf, vedi [20]. Supponiamo infatti di richiedere che G sia monotona strettamente crescente e supponiamo che due soluzioni dello stesso problema (1), siano esse u e v, si tocchino in un punto *regolare* (sia da destra che da sinistra) della frontiera libera. Ciò significa $\Delta(u - v) = 0$ in $\Omega^+(u)$ con $\max_{\Omega^+(u)}(u - v) = 0 = u(x_0) - v(x_0)$; dal principio del massimo di Hopf segue

$$u_\nu^+(x_0) < v_\nu^+(x_0). \tag{4}$$

In modo analogo si conclude $\Delta(v - u) = 0$ in $\Omega^-(v)$ e $\inf_{\Omega^+(v)}(v - u) = 0 = u(x_0) - v(x_0)$ da cui segue, sempre dal principio del massimo di Hopf, che $v_\nu^-(x_0) < u_\nu^-(x_0)$. Se G è strettamente crescente, da (4) e (5), segue allora che

$$v_\nu^+(x_0) = G(v_\nu^-(x_0)) < G(u_\nu^-(x_0)) = u_\nu^+(x_0) \tag{5}$$

in contraddizione con (4). Pertanto se imponiamo che G sia monotona crescente in senso stretto, allora due soluzioni non possono toccarsi nei punti regolari della frontiera. Di fatto ciò determina un comportamento *ellittico* della frontiera libera. In altri termini se G è monotona strettamente crescente allora vale una sorta di principio del confronto tra le soluzioni.

Pertanto se si assume che la frontiera libera abbia un comportamento *ellittico* e sia il grafico di una funzione Lipschitz, allora la condizione di bilanciamento del *flusso* in $\mathcal{F}(u)$, vedi (2) e (3), *regolarizza* (istantaneamente) la frontiera libera nel senso che $\mathcal{F}(u) \in C^{1,\alpha}$, vedi [6].

Oltre al caso dell'operatore di Laplace, i problemi di frontiera libera a due fasi possono essere associati ad operatori in forma di non divergenza a coefficienti variabili e quindi lineari, ma anche ad operatori non lineari, si pensi agli operatori estremali di Pucci così definiti. Per ogni M, matrice simmetrica $n \times n$, siano

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathrm{Tr}(AM), \quad \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(M) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \mathrm{Tr}(AM),$$

dove $0 < \lambda < \Lambda$ sono due numeri positivi e Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, mentre $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \le i,j \le n}$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, è una matrice, $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} = \{A : \lambda \mid \xi \mid^2 \le \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda \mid \xi \mid^2\}$, e $L_A\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}\phi(x) = \mathrm{Tr}(A(x)D^2\phi(x))$.

Altri esempi sono gli operatori di tipo *Bellman*; sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$ una famiglia di matrici di $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$, poniamo

$$Q(M,x) = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}} \mathrm{Tr}(A(x)M).$$

Oppure di tipo *Isaacs*; siano $P_1 \subset \mathbb{R}$,$P_2 \subset \mathbb{R}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in P_1$ e per ogni $\beta \in P_2$, sia $A^{\alpha,\beta}(x) \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$,
poniamo

$$F(M,x) = \sup_{\alpha \in P_1} \inf_{\beta \in P_2} \mathrm{Tr}(\mathcal{A}^{\alpha,\beta}(x)M).$$

Q e F sono esempi di operatori fortemente non lineari (fully non linear operator), uniformemente ellittici (uniformly elliptic) vedi [4] e [20], entrambi dipendenti anche da x e l'ultimo dei quali non convesso.

Dopo il lavoro di Caffarelli, vedi [6], il guadagno di regolarità della frontiera libera è stato dimostrato, sempre per operatori a coefficienti costanti, in condizioni di anisotropia da Feldman, vedi [15], e per operatori fortememnte non lineari convessi e non convessi da Wang e Feldman, ma in entrambi i casi, vedi rispettivamente [27] e [16], per operatori non esplicitamente dipendenti dalla variabile x. Per quanto riguarda il caso lineare di operatori in forma di traccia a coefficienti variabili, nel lavoro svolto in collaborazione con C. Cerutti e S. Salsa, vedi [9], abbiamo provato, assumendo che i coefficienti siano $(C^{0,\alpha})$ e in ipotesi di anisotropia, l'analogo guadagno di regolarità, già provato in [6] per l'operatore di Laplace. I principali risultati frutto di questa collaborazione sono elencati nella successiva sezione. Per quanto riguarda il caso fortemente non lineare uniformemente ellittico ho inoltre provato il guadagno di regolarità, vedi [17], per una classe di operatori positivamente omogenei con modulo di continuià C^α nella variabile x, del tipo $F(D^2u(x), x) = 0$.

Per concludere questa parte occorre dire che esiste per l'operatore del calore la controparte parabolica del problema a due fasi. Ricordo a tale proposito il lavoro di Athanasopulos, Caffarelli e Salsa, vedi [3], mentre il caso a coefficienti variabili e quello non omogeneo sono in preparazione, vedi [10], [18]. Per quanto riguarda invece un primo approccio al caso subellittico, ma per problemi a una fase, segnaliamo il lavoro di Danielli, Garofalo e Salsa, [13].

2. Risultati principali

Per ottenere il guadagno di regolarità della frontiera libera Luis Caffarelli ha impiegato una tecnica geometrica basata sull'esistenza di una successione di coni di ampiezza crescente che

letteralmente *appiattiscono* la frontiera libera. La dimostrazione viene suddivisa in tre parti. Nella priva si prova l'esistenza di un cono di monotonia in un intorno della frontiera libera, poi si prova che questo cono può essere allargato quando si è abbastanza lontani dalla frontiera libera ed infine si prova che il guadagno nell'apertura può essere trasportato fino alla frontiera libera. I risultati impiegati per le dimostrazioni sono la disuguaglianza di Harnack interna e alla frontiera, le stime di Schauder, vedi [8], [21], [20] e il Teorema di confronto alla frontiera, vedi [8], [21], [5], oltre alle proprietà di media caratterizzanti le funzioni armoniche, vedi [26] e [19] (per un approccio in altri contesti vedi i lavori di Pini [24], e Citti, Lanconelli e Garofalo [11]).

Nel lavoro di Caffarelli, [6], oltre ai risultati appena citati viene utilizzata l'invarianza dell'operatore di Laplace per traslazioni ed omotetie; tale invarianza tuttavia, pur giocando un ruolo semplificatorio per quanto riguarda lo sviluppo di alcune dimostrazioni, non è determinante per il raggiungimento del nostro scopo, vedi [9].

Prima di introdurre i corrispondenti risultati ottenuti in collaborazione con Cerutti e Salsa, vedi [9], riformuliamo il problema di frontiera libera (1) nel seguente più ampio contesto.

Definizione 2.1. Sia u una funzione continua nel cilindro unitario $C_1 = B_1^{n-1} \times (-1,1) \subset \mathbf{R}^n$ soluzione di

$$\mathcal{L}^1 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^1(x) D_{ij} u = 0 \qquad \text{in } \Omega^+(u) = \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \tag{6}$$

$$\mathcal{L}^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x) D_{ij} u = 0 \qquad \text{in } \Omega^-(u) = \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\}^0 \tag{7}$$

Inoltre se $x_0 \in \mathcal{F}(u) \equiv \partial\Omega^+(u) \cap C_1$ ed esiste una palla $B_\varrho(y)$ tale che $x_0 \in \partial B_\varrho(y)$ e $B_\varrho(y)$ è contenuta o in $\Omega^+(u)$ o in $\Omega^-(u)$, allora

$$u(x) = \alpha < x - x_0, \nu >^+ - \beta < x - x_0, \nu >^- + o(|x - x_0|), \qquad x \to x_0 \tag{8}$$

dove ν è la normale unitaria a $\partial B_\varrho(y)$ at x_0 interna a $\Omega^+(u)$ e

$$\alpha = G(\beta). \tag{9}$$

L'insieme $\mathcal{F}(u)$ è la frontiera libera e (9) esprime la condizione di frontiera libera $u_\nu^+ = G(u_\nu^-)$ in senso debole.

$\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$ sono operatori uniformemente ellittici simmetrici, con costante diellitticità Λ cioè, se $A^s(x) = \left(a_{ij}^s(x)\right)$, $s = 1,2$, allora

$$a_{ij}^s(x) = a_{ji}^s(x), \quad \Lambda I \leq A^s(x) \leq \Lambda^{-1} I \qquad x \in C_1 \tag{10}$$

dove I è la matrice identità.

Supponiamo che $\mathcal{F}(u)$ sia una superficie Lipschitz. Proveremo che è anche $C^{1,\gamma}$. L'ipotesi naturale sui coefficienti consiste nel richiedere che siano $C^{0,\alpha}$. Il risultato principale può così essere formulato.

Teorema 2.2. *Sia u una soluzione debole del problema di frontiera libera (6)-(9) in C_1. Supponiamo $0 \in F(u)$ e che*

i) *$A^s \in C^{0,a}(C_1)$,$s = 1,2$ $0 < a \leq 1$ e la condizione (10) è soddisfatta.*
ii) *$\Omega^+(u) = \{(x', x_n) : x_n > f(x')\}$ dove f è una funzione Lipschitz continua con $Lip(f) \leq L$.*
iii) *$G = G(z)$ è continua, strettamente crescente ed esiste un N $N > 0$, tale che $z^{-N}G(z)$ è decrescente in $(0, +\infty)$. Allora, in $B_{1/2}^{n-1}$, f è una funzione $C^{1,\gamma}$ con $\gamma = \gamma(n, N, L, \Lambda, a)$.*

Sia $T_s = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| < s,\ f(x') < x_n < 2Ls\}$, dove f una funzione Lipschitz con costante L.

Il seguente risultato prova l'esistenza di un cono di monotonia in un intorno della frontiera libera. La dimostrazione di questa parte ha richiesto l'uso delle stime di Schauder. Questo passaggio nel caso dell'operatore di Laplace è in un certo qual modo naturale, perché le derivate di una funzione armonica sono ancora armoniche. Nel caso dei coefficienti variabili questo non è più vero, almeno in generale, vedi [25].

Lemma 2.3. *Sia u soluzione positiva di $\mathcal{L}u = 0$ in T_4, che si annulla in $F = \{x_n = f(x')\}$. Allora, esiste η tale che in*

$$\mathcal{N}_\eta(F) = \{f(x') < x_n < f(x') + \eta\} \cap T_1$$

u è crescente lungo le direzioni τ appartenenti al cono $\Gamma(e_n, \theta)$, di asse e_n e apertura $\theta = \frac{1}{2}\cot^{-1} L$. Inoltre, in $\mathcal{N}_\eta(F)$,

$$c^{-1}\frac{u(x)}{d_x} \leq D_n u(x) \leq c\frac{u(x)}{d_x} \tag{11}$$

dove $d_x = \mathrm{dist}(x, F)$.

Il successivo lemma descrive descrive l'incremento dell'ampiezza del cono di monotonia.

Lemma 2.4. *Sia u una soluzione del nostro problema di frontiera libera. Allora in $B_{\lambda/8}(\lambda e_n)$,*

$$\sup_{B_{(1+h\delta)r}(x)} u(y-\tau) \leq u(x) - c\epsilon\delta u(e_n) \tag{12}$$

Sia $A(x)$ una matrice a coefficienti continui e $||\cdot||$ una norma. Indicheremo con $\omega(r)$ il modulo di continuità di A i.e.

$$\omega(r) = \sup_{|x-y|<r} ||\, A(x) - A(y)\, ||\,. \tag{13}$$

Il passaggio succesivo consiste nel costruire una sottosoluzione del problema di frontiera libera. Le difficoltà principali nella dimostrazione del lemma seguente sono collegate al fatto che le formule di media non sono più esatte, vedi [26], [19] e confronta con, [11] e [22] per ulteriori approfondimenti, e, per operatori più generali.

Lemma 2.5. *Sia $\mathcal{L}$ un operatore uniformemente ellittico in B_1 con costante di ellitticità Λ e la cui matrice dei coefficienti $A = A(x)$ sia continua con modulo di continuità $\omega(r)$. Sia ϕ una funzione di classe C^2 in B_1, $\phi \leq m_0$ in B_1, che soddisfa la seguente disequazione*

$$\mathcal{L}\phi - \frac{C}{\phi}(\,|\nabla\phi|^2 + \omega^2) \geq 0 \tag{14}$$

dove $\omega = \omega(m_0/\Lambda)$. Sia u una funzione continua, definita in un dominio Ω sufficientemente grande in modo tale che

$$v(x) = \sup_{|\nu|=1} u(x + \phi(x)\nu) = \sup_{B_{\phi(x)}(x)} u, \tag{15}$$

sia ben definita in B_1. Allora, esistono μ, ω_0, c_0 costanti dipendenti soltanto da n, Λ, tali che se $|\nabla\phi| < \mu$, $\omega \leq \omega_0$, $C \geq c_0$ e $\mathcal{L}u = 0$ in $\{u > 0\}$, allora $\mathcal{L}v \geq 0$ in $\{v > 0\}$ (in senso viscoso).

Lemma 2.6. *Sia $\bar{C} > 0$. Esiste un numero positivo $\bar{\eta}$, μ, ω_0, $\omega_0 << 1$, e una famiglia di funzioni C^2. ϕ_t, $0 \leq t \leq 1$, definita in $\bar{B}_1 \setminus B_{1/16}(x_0)$, tale che, se $\omega \leq \omega_0$,*

i) $1 - \omega \leq \phi_t \leq 1 + \mu t$

ii) *per ogni operatore ellittico $\mathcal{L}$ con costante di ellitticità Λ,*

$$\phi_t \mathcal{L}\phi_t \geq \bar{C}\left(|\nabla\phi_t|^2 + \omega^2\right) \tag{16}$$

iii) $\phi_t \leq 1$ *in* $B_1 \setminus B_{7/8}$

iv) $|\nabla\phi_t| \leq C(\mu t + \omega)$

v) $\phi_t \geq 1 - \omega + \bar{\eta}\mu t$, *in* $B_{1/8}$

vi) *Inoltre se* $\epsilon > 0$ *e* $\epsilon^2 \geq \bar{C}\omega_0$. *Allora la famiglia* $\epsilon\,\phi_t$ *soddisfa la disuguaglianza (16).*

Useremo ora la famiglia di funzioni $\mathcal{L}$-subarmoniche costruite nel Lemma 2.6, in particolare il punto vi) per ottenere un miglioramento nell'apertura del cono di monotonia fino alla frontiera libera. A differenza di quanto accade nel caso a coefficienti costanti, non è possibile trasportare totalmente il guadagno di monotonia ottenuto nel Teorema 2.4. Mostreremo invece che se ϵ un numero positivo eventualmente piccolo, un opportuno riscalamento della funzione u è ϵ-monotono fino alla frontiera libera lungo le direzioni di un cono più grande. Si otterrà quindi la $C^{1,\gamma}$ regolarità di $\mathcal{F}(u)$ attraverso un procedimento iterativo che tenga conto della ϵ-monotonia, dell'apertura del cono, e del riscalamento.

Ricordiamo che una funzione è ϵ-monotona, vedi [7] in un dominio D, lungo una direzione τ se

$$u(x) - u(x - \epsilon'\tau) \geq 0,$$

per ogni $x \in D$ e ogni $\epsilon' \geq \epsilon$.

È possibile estendere il Lemma 14 di Caffarelli, vedi [6] nel modo seguente.

Lemma 2.7. *Siano* $u_1 \leq u_2$ *due soluzioni del nostro problema di frontiera libera in* B_1, *con* $0 \in F(u_2)$. *Sia* $\epsilon > 0$ *e* $\bar{C}$, $\bar{\eta}$, μ *come nel Lemma (2.6). Supponiamo che, in* B_1:

i) $\| A^s(x) - A^s(0) \| \leq \omega_0$, *con* $\omega_0 \leq \min\{\frac{\epsilon^2}{\bar{C}}, \frac{1}{2}\bar{\eta}\mu\}$;

ii) $v_\epsilon(x) = \sup_{B_\epsilon(x)} u_1 \leq u_2(x)$, *in* $B_{1-\epsilon}$;

iii) *per* $\sigma > 0$, *piccolo e* $x_0 = \frac{1}{4}e_n$, $B_{1/16}(x_0) \subset \Omega^+(u_1)$ *e*

$$v_\epsilon(x_0) \leq (1 - \sigma\epsilon)u_2(x_0).$$

Allora, per ϵ *abbastanza piccolo, esiste* $\bar{h} = \bar{h}(n, \mu, L, \Lambda)$ *tale che in* $B_{1/8}$

$$v_{(1+\bar{h}\sigma)\epsilon}(x) \leq u_2(x). \tag{17}$$

Come conseguenza si ottiene che vale il seguente risultato che permette di dire che come nel caso a coefficienti costanti la ϵ monotonia induce la piena monotonia a distanza $M\epsilon$ dalla frontiera libera (vedi [7], Lemma 1).

Lemma 2.8. *Let* $u > 0$, $\mathcal{L}u = 0$ *in* T_1. *Supponiamo che*

i) u *sia* ϵ*-monotona lungo una direzione* τ *ed inoltre, se* $x \in T_{2/3}$,

$$u(x) - u(x - \tau) \geq c_0\epsilon\delta u(x) \tag{18}$$

ii) $\| A(x) - A(0) \| \leq cr^\beta \leq \omega$, *con* $\omega \leq \min\{\epsilon^2/\bar{C}, \frac{1}{3}c_0\epsilon\delta\}$;

iii) $B_{2M\epsilon}(x_0) \subset T_{1/2}$.

Allora se M *è abbastanza grande,* $D_\tau u(x_0) > 0$.

Finalmente la conclusione della dimostrazione del Teorema 2.2 segue applicando il Lemma 2.8 alla parte positiva di $u_{\lambda_1}(x) = \frac{u(\lambda_1 x)}{\lambda_1}$.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ancona *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978), no. 4, 169–213, x.

[2] I. Athanasopoulos; L. Caffarelli*A theorem of real analysis and its application to free boundary problems.* Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no. 5, 499–502.

[3] I. Athanasopoulos; L. Caffarelli; S. Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. 176 (1996), no. 2, 245–282.

[4] X. Cabré;L. Caffarelli, *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. vi+104 pp.

[5] P. Bauman, *Positive solutions of elliptic equations in nondivergence form and their adjoints.* Ark. Mat. 22 (1984), no. 2, 153–173.

[6] L. CAFFARELLI, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, Part 1: Lipschitz free boundaries are* C^1_α , Revista Matematica Iberoamericana, 3 (1987), 139–162.

[7] L. CAFFARELLI *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. II. Flat free boundaries are Lipschitz*, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), no. 1, 55–78.

[8] L. CAFFARELLI; E., FABES; S., MORTOLA; S., SALSA, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), no. 4, 621–640.

[9] M.C. CERUTTI; F. FERRARI; S. SALSA, *Two phase problems for linear elliptic operators with variable coefficients: Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\gamma}$, preprint Politecnico di Milano n.522/P luglio 2002.

[10] M.C. CERUTTI; F. FERRARI, S. SALSA, *On the regularity of the free boundary for parabolic two phase problem with variable coefficients.* In preparazione

[11] G. CITTI; N. GAROFALO; E. LANCONELLI, *Harnack's inequality for sum of squares of vector fields plus a potential.* Amer. J. Math. 115 (1993), no. 3, 699–734.

[12] E. DE GIORGI, Sulla differenziabilit e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 1957 25–43.

[13] D. DANIELLI; N. GAROFALO; S. SALSA, *Variational inequalities with Lack of Ellipticity. Part I: Optimal Interior Regularity and Non-degeneracy of the Free boundary*, apparirà in Indiana Univ. Math. J.

[14] E. FABES;N. GAROFALO; S. MARÍN-MALAVE; S., SALSA, *Fatou theorems for some nonlinear elliptic equations.* Rev. Mat. Iberoamericana 4 (1988), no. 2, 227–251.

[15] M. FELDMAN, *Regularity for nonisotropic two-phase problems with Lipschitz free boundaries.* Differential Integral Equations 10 (1997), no. 6, 1171–1179.

[16] M. FELDMAN, *Regularity of Lipschitz free boundaries in two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), no. 3, 1171–1200.

[17] F. FERRARI, *Lipschitz free boundaries in two-phase problems for fully non linear elliptic operators are* $C^{1,\alpha}$, preprint 2003.

[18] F. FERRARI, *On the regularity of the free boundary for homogeneous Stefan problem problem.* In preparazione

[19] W. Fulks, *An approximate Gauss mean value theorem.* Pacific J. Math. 14 1964 513–516.

[20] D. GILBARG;N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[21] D.S.,JERISON;C.E. KENIG, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains.* Adv. in Math. 46 (1982), no. 1, 80–147.

[22] E. LANCONELLI,*Formule di media per operatori subellittici del secondo ordine*, Seminario di Analisi Matematica Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna 1989.

[23] K. MILLER, *Barriers on cones for uniformly elliptic operators.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 76 (1967) 93–105.

[24] B.PINI, Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 32, (1951). 179–204.

[25] M.H. PROTTER;H.F. WEINBERGER,*Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967

[26] C. PUCCI; G. TALENTI, *Elliptic (second-order) partial differential equations with measurable coefficients and approximating integral equations.* Advances in Math. 19 (1976), no. 1, 48–105.

[27] P.Y, WANG, *Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. I. Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\alpha}$, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), no. 7, 799–810.

Fausto Ferrari
Dipartimento di Matematica dell'Università
Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italy
and
C.I.R.A.M. Via Saragozza, 8, 40123 Bologna, Italy.
E-mail: ferrari@dm.unibo.it